अध्याय 6

रैखिक असमिकाएँ

6.1 समग्र अवलोकन (Overview)

6.1.1 एक कथन जिसमें '>', '<', '≥', '≤' के चिह्न प्रयुक्त होते हैं; असमिका कहलाती है। उदाहरणत: $5 > 3, x \le 4, x + y \ge 9$.

(i) जिन असमिकाओं में चर सम्मिलित नहीं होते उन्हें संख्यांक असमिकाएँ कहते हैं। उदाहरणत: $3 < 8, 5 \ge 2$.

(ii) जिन असमिकाओं में चर सम्मिलित होते हैं उन्हें शाब्दिक (चरांक) असमिका कहते हैं। उदाहणत: $x > 3, y \le 5, x - y \ge 0$.

(iii) किसी असमिका में एक से अधिक चर हो सकते हैं और यह असमिका रैखिक, द्विघातीय अथवा त्रिघातीय इत्यादि हो सकती है। उदाहरणत: $3x - 2 < 0$ एक चर वाली रैखिक असमिका है, $2x + 3y \ge 4$ दो चर वाली रैखिक असमिका है और $x^2 + 3x + 2 < 0$ एक चर वाली द्विघातीय असमिका है।

(iv) ऐसी असमिकाएँ जिनमें '>' अथवा '<' प्रयुक्त होते हैं, दृढ़ असमिकाएँ कहलाती हैं। उदाहरणत: $3x - y > 5, x < 3$.

(v) जिस असमिका में '≥' अथवा '≤' चिह्न प्रयुक्त होते हैं उसे शिथिल असमिका कहते हैं। उदाहरणत: $3x - y \ge 5, x \le 5$.

6.1.2 ***असमिका का हल***

(i) चर का वह मान (अथवा चरों के वे मान) जो दी हुई असमिका को एक सत्य कथन बनाता हो (बनाते हों), उस असमिका का हल कहलाता है। किसी असमिका के सभी हलों का समुच्चय उस असमिका का हल समुच्चय कहलाता है। उदाहरणत: असमिका $x - 1 \ge 0$ के अनंत हल हैं क्योंकि एक के बराबर अथवा अधिक मान वाली वास्तविक संख्याएँ इस असमिका को एक सत्य कथन बनाती हैं। **R** के अंतर्गत असमिका $x^2 + 1 < 0$ का कोई हल नहीं है क्योंकि x का कोई भी वास्तविक मान इसे एक सत्य कथन नहीं बनाता है।

एक असमिका को हल करने के लिए हम :

(i) उसके दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ सकते हैं अथवा दोनों पक्षों से समान संख्या घटा सकते हैं। ऐसा करने पर असमिका का चिह्न परिवर्तित नहीं होता है।

(ii) उसके दोनों पक्षों को समान धनात्मक संख्या से गुणा (भाग) कर सकते हैं। ऐसा करने पर भी असमिका चिह्न परिवर्तित नहीं होता है। तथापि असमिका के दोनों पक्षों को समान ऋणात्मक संख्या से गुणा अथवा भाग करने पर असमिका का चिह्न बदल जाता है अर्थात, '>' का चिह्न '<' के चिह्न में परिवर्तित हो जाता है और विलोमत:

6.1.3 एक चर वाली रैखिक असमिका के हल का संख्या रेखा पर निरूपण

एक चर वाली रैखिक असमिका के हल को संख्या रेखा पर निरूपित करने के लिए हम निम्नलिखित परिपाटियों (प्रथाओं) का उपयोग करते हैं:

(i) यदि असमिका में '≥' अथवा '≤', के चिह्न सम्मिलित हैं तो हम संख्या रेखा पर एक छायांकित वृत्त (•) बनाते हैं जो यह सूचित करता है कि छायांकित वृत्त के संगत संख्या हल समुच्चय में सम्मिलित है।

(ii) यदि असमिका में '>' अथवा '<' के चिह्न सम्मिलित हैं तो हम संख्या रेखा पर एक वृत्त (O) बनाते हैं जो यह सूचित करता है कि वृत्त के संगत संख्या हल समुच्चय में सम्मिलित नहीं है।

6.1.4 रैखिक असमिका के हल का आलेखीय निरूपण

(a) एक अथवा दो चरों वाली रैखिक असमिका के हल का किसी तल में आलेखीय निरूपण करने के लिए हम निम्नानुसार बढ़ते हैं:

(i) यदि असमिका में '≥' अथवा '≤', के चिह्न सम्मिलित हैं तो हम संबंधित रेखा के आलेख को एक मोटी रेखा के रूप में खींचते हैं जो यह सूचित करता है कि रेखा के बिंदु हल समुच्चय में सम्मिलित हैं।

(ii) यदि असमिका में '>' अथवा '<' के चिह्न सम्मिलित हैं तो हम संबंधित रेखा के आलेख को बिंदुकित रेखा के रूप में खींचते हैं जो यह सूचित करता है कि रेखा के बिंदु हल समुच्चय में सम्मिलित नहीं हैं।

(b) एक चर वाली रैखिक असमिका के हल को संख्या रेखा एवं तल दोनों ही पर निरूपित किया जा सकता है परंतु $ax + by > c$, $ax + by \geq c$, $ax + by < c$ अथवा $ax + by \leq c$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$) के जैसी दो चरों वाली रैखिक असमिकाओं के हल को केवल एक तल पर ही निरूपित किया जा सकता है।

(c) दो अथवा अधिक असमिकाएँ मिलकर असमिका निकाय बनाती हैं और इस असमिका निकाय का हल निकाय में सम्मिलित सभी असमिकाओं का उभयनिष्ठ हल होता है।

6.1.5 दो महत्त्वपूर्ण नियम

(a) यदि $a, b \in \mathbf{R}$ एवं $b \neq 0$, हो तो

(i) $ab > 0$ अथवा $\dfrac{a}{b} > 0 \Rightarrow a$ तथा b के चिह्न समान होते हैं।

(ii) $ab < 0$ अथवा $\dfrac{a}{b} < 0 \Rightarrow a$ तथा b के चिह्न एक दूसरे के विपरीत होते हैं।

(b) यदि a कोई भी धनात्मक वास्तविक संख्या है, अर्थात $a > 0$, तो

(i) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

(ii) $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ अथवा $x > a$

$|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ अथवा $x \geq a$

6.2 हल किए हुए उदारहण

लघु उत्तरीय (S.A.)

उदाहरण 1 असमिका $3x - 5 < x + 7$ को हल कीजिए जहाँ

(i) x एक प्राकृतिक संख्या है (ii) x एक पूर्ण संख्या है

(iii) x एक पूर्णांक है (iv) x एक वास्तविक संख्या है

हल $3x - 5 < x + 7$

$\Rightarrow \quad 3x < x + 12$ (दोनों पक्षों पर 5 जोड़ने पर)

$\Rightarrow \quad 2x < 12$ (दोनों पक्षों से x घटाने पर)

$\Rightarrow \quad x < 6$ (दोनों पक्षों को 2 से भाग करने पर)

(i) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ हल समुच्चय है।

(ii) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ हल समुच्चय है।

(iii) $\{....-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ हल समुच्चय है।

(iv) $\{x : x \in \mathbf{R}$ और $x < 6\}$ हल समुच्चय हैं, अर्थात, 6 से छोटी सभी वास्तविक संख्याएँ हल समुच्चय में सम्मिलित हैं।

उदाहरण 2 $\dfrac{x-2}{x+5} > 2$ को हल कीजिए

हल $\dfrac{x-2}{x+5} > 2$

$\Rightarrow \quad \dfrac{x-2}{x+5} - 2 > 0$ [दोनों पक्षों से 2 घटाने पर]

$\Rightarrow \quad \dfrac{-(x+12)}{x+5} > 0$

$\Rightarrow \quad \dfrac{x+12}{x+5} < 0$ [दोनों पक्षों को -1 से गुणा करने पर]

$\Rightarrow \quad x + 12 > 0$ और $x + 5 < 0$ [क्योंकि $\dfrac{a}{b} < 0 \Rightarrow a$ तथा b के विपरीत चिह्न हैं]

अथवा

$x + 12 < 0$ और $x + 5 > 0$

$\Rightarrow \quad x > -12$ और $x < -5$

अथवा

$x < -12$ और $x > -5$ (असंभव)

इसलिए $-12 < x < -5$, अर्थात्, $x \in (-12, -5)$

उदाहरण 3 $|3-4x| \geq 9$ को हल कीजिए।

हल हमें ज्ञात है कि $|3-4x| \geq 9$

$\Rightarrow$ $3 - 4x \leq -9$ या $3 - 4x \geq 9$ [क्योंकि $|x| \geq a \Rightarrow x \leq -a$ अथवा $x \geq a$]

$\Rightarrow$ $-4x \leq -12$ या $-4x \geq 6$

$\Rightarrow$ $x \geq 3$ या $x \leq \frac{-3}{2}$ [दोनों पक्षों को -4 से भाग करने पर]

$\Rightarrow$ $x \in (-\infty, \frac{-3}{2}] \cup [3, \infty)$

उदाहरण 4 $1 \leq |x-2| \leq 3$ को हल कीजिए।

हल हमें ज्ञात है कि, $1 \leq |x-2| \leq 3$

$\Rightarrow$ $|x-2| \geq 1$ और $|x-2| \leq 3$

$\Rightarrow$ $(x - 2 \leq -1$ या $x - 2 \geq 1)$ और $(-3 \leq x - 2 \leq 3)$

$\Rightarrow$ $(x \leq 1$ या $x \geq 3)$ एवं $(-1 \leq x \leq 5)$

$\Rightarrow$ $x \in (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$ और $x \in [-1, 5]$

दोनों असमिकाओं के हलों को सम्मिलित करने पर

$x \in [-1, 1] \cup [3, 5]$

उदाहरण 5 किसी उत्पाद के लागत फलन एवं राजस्व फलन क्रमशः $C(x) = 20x + 4000$ एवं $R(x) = 60x + 2000$ हैं जहाँ x निर्मित की गईं एवं बेची गईं वस्तुओं की संख्या है। कुछ लाभ अर्जित करने के लिए कितनी वस्तुएँ अवश्य बेची जानी चाहिए?

हल हम जानते हैं कि, लाभ = राजस्व – लागत

$= (60x + 2000) - (20x + 4000)$

$= 40x - 2000$

कुछ लाभ अर्जित करने के लिए, $40x - 2000 > 0$

$\Rightarrow$ $x > 50$

अतः कुछ लाभ अर्जित करने के लिए निर्माता को 50 से अधिक वस्तुएँ बेचनी चाहिए

उदाहरण 6 $|x+1| + |x| > 3$ को x के लिए हल कीजिए।

हल दी हुई असमिका के बाएँ पक्ष में दो पद ऐसे हैं जिनमें मापांक (Modulus) का प्रतीक अंतर्विष्ट हैं। मापांक के अंदर वाले व्यंजक को शून्य के बराबर रखने पर हमें $x = -1, 0$ क्रांतिक बिंदुओं के रूप में प्राप्त होते हैं। ये क्रांतिक बिंदु वास्तविक रेखा को तीन भागों में $(-\infty, -1), [-1, 0), [0, \infty)$ में विभाजित करते हैं।

स्थिति (केस)-I जब $-\infty < x < -1$

$$|x+1| + |x| > 3 \Rightarrow -x-1-x > 3 \Rightarrow x < -2.$$

स्थिति (केस)-II जब $-1 \le x < 0$,

$$|x+1| + |x| > 3 \Rightarrow x+1-x > 3 \Rightarrow 1 > 3 \qquad \text{(असंभव)}$$

स्थिति (केस)-III जब $0 \le x < \infty$,

$$|x+1| + |x| > 3 \Rightarrow x+1+x > 3 \Rightarrow x > 1.$$

(I), (II) एवं (III) के परिणामों को सम्मिलित करने पर

$$x \in (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$$

दीर्घ उत्तरीय (L.A.)

उदाहरण 7 $\dfrac{|x+3| + x}{x+2} > 1$ को x के लिए हल कीजिए।

हल हमें ज्ञात है कि, $\dfrac{|x+3| + x}{x+2} > 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{|x+3| + x}{x+2} - 1 > 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|x+3| - 2}{x+2} > 0$$

अब दो स्थितियाँ उत्पन्न होती हैं:

स्थिति (केस) I जब $x+3 \ge 0$, अर्थात् $x \ge -3$ तब

$$\frac{|x+3| - 2}{x+2} > 0 \Rightarrow \frac{x+3-2}{x+2} > 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x+1}{x+2} > 0$$

$\Rightarrow \quad \{(x+1) > 0$ और $x+2 > 0\}$ या $\{x+1 < 0$ एवं $x+2 < 0\}$

$\Rightarrow \quad \{x > -1$ और $x > -2\}$ या $\{x < -1$ और $x < -2\}$

$\Rightarrow \quad x > -1$ या $x < -2$

$\Rightarrow \quad x \in (-1, \infty)$ या $x \in (-\infty, -2)$

$\Rightarrow \quad x \in (-3, -2) \cup (-1, \infty)$ [क्योंकि $x \ge -3$] ... (1)

स्थिति (केस) II जब $x + 3 < 0$, अर्थात् $x < -3$

$$\frac{|x+3|-2}{x+2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-x-3-2}{x+2} > 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-(x+5)}{x+2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x+5}{x+2} < 0$$

$\Rightarrow$ $(x + 5 < 0$ और $x + 2 > 0)$ या $(x + 5 > 0$ और $x + 2 < 0)$

$\Rightarrow$ $(x < -5$ और $x > -2)$ या $(x > -5$ और $x < -2)$

यह असंभव है

इसलिये $x \in (-5, -2)$ ... (2)

(I) तथा (II) को सम्मिलित करने पर

$x \in (-5, -2) \cup (-1, \infty)$ अभीष्ट हल के रूप में प्राप्त होता है।

उदाहरण 8 निम्नलिखित असमिका निकाय को हल कीजिए:

$$\frac{x}{2x+1} \geq \frac{1}{4}, \frac{6x}{4x-1} < \frac{1}{2}$$

हल प्रथम असमिका से या $\frac{x}{2x+1} - \frac{1}{4} \geq 0$

$\Rightarrow$ $\frac{2x-1}{2x+1} \geq 0$

$\Rightarrow$ $(2x - 1 \geq 0$ और $2x + 1 > 0)$ या $(2x - 1 \leq 0$ और $2x + 1 < 0)$

$\Rightarrow$ $(x \geq \frac{1}{2}$ और $x > -\frac{1}{2})$ या $(x \leq \frac{1}{2}$ और $x < -\frac{1}{2})$

$\Rightarrow$ $x \geq \frac{1}{2}$ या $x < -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup [\frac{1}{2}, \infty)$ ... (1)

दूसरी असमिका से $\frac{6x}{4x-1} - \frac{1}{2} < 0$

$\Rightarrow$ $\frac{8x+1}{4x-1} < 0$

$\Rightarrow$ $(8x + 1 < 0$ और $4x - 1 > 0)$ या $(8x + 1 > 0$ और $4x - 1 < 0)$

$\Rightarrow$ $(x < -\frac{1}{8}$ और $x > \frac{1}{4})$ या $(x > -\frac{1}{8}$ या $x < \frac{1}{4})$

(यह असंभव है)

$\Rightarrow$ $x \in (-\frac{1}{8}, \frac{1}{4})$ ... (2)

ध्यान दीजिए (1) और (2) का उभयनिष्ठ हल रिक्त समुच्चय है। अत: दिए हुए असमिका निकाय का कोई हल नहीं है।

उदाहरण 9 ऐसी रैखिक असमिकाएँ ज्ञात कीजिए जिनका हल समुच्चय नीचे दी गई आकृति का छायांकित भाग है।

हल

आकृति 6.1

(i) $2x + 3y = 3$ पर विचार कीजिए। हम देखते हैं कि छायांकित क्षेत्र एवं मूल बिंदु $(0, 0)$ इस रेखा की विपरीत ओर स्थित हैं। मूल बिन्दु $(0, 0)$ असमिका $2x + 3y \leq 3$ को संतुष्ट करता है। इसलिए रेखा $2x + 3y = 3$ के संगत असमिका $x + 3y \geq 3$ होनी चाहिए।

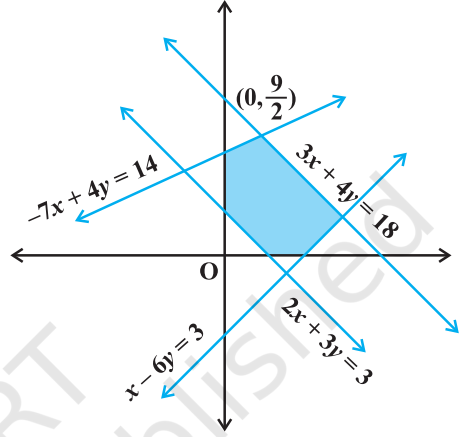
(ii) $3x + 4y = 18$ पर विचार कीजिए। हम देखते हैं कि छायांकित क्षेत्र एवं मूल बिंदु $(0, 0)$ उस रेखा के एक ही तरफ स्थित है और बिंदु $(0,0)$ असमिका $3x + 4y \leq 18$ को संतुष्ट करता है। इसलिए $3x + 4y \leq 18$, रेखा $3x + 4y = 18$, की संगत असमिका है।

(iii) $-7x + 4y = 14$ पर विचार कीजिए। आकृति को देखकर यह स्पष्ट है कि छायांकित क्षेत्र एवं मूल बिंदु इस रेखा के एक ही ओर स्थित है और बिंदु $(0, 0)$ असमिका $-7x + 4y \leq 14$ को संतुष्ट करता है। इसलिए रेखा $-7x + 4y = 14$ की संगत असमिका $-7x + 4y \leq 14$ है।

(iv) $x - 6y = 3$ पर विचार कीजिए। ध्यान दीजिए छायांकित क्षेत्र एवं मूल बिंदु इस रेखा के एक ही दिशा में स्थित हैं और बिंदु $(0, 0)$ असमिका $x - 6y \leq 3$ को संतुष्ट करता है। इसलिए रेखा $x - 6y = 3$ की संगत असमिका $x - 6y \leq 3$ है।

(v) यह भी ध्यान दीजिए कि छायांकित क्षेत्र केवल प्रथम चतुर्थांश में स्थित हैं इसलिए $x \geq 0, y \geq 0$.

अत: (i), (ii), (iii), (iv) एवं (v) से दिये हुए हल समुच्चय के संगत निम्नलिखित रैखिक असमिकाएँ प्राप्त होती हैं:

$2x + 3y \geq 3, 3x + 4y \leq 18, -7x + 4y \leq 14,$
$x - 6y \leq 3, x > 0, y \geq 0$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न (Objective type)

10 *से* 13 *तक के उदाहरणों में से प्रत्येक में दिये हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर का चयन कीजिए* (M.C.Q.):

उदाहरण 10 यदि $\frac{|x-2|}{x-2} \geq 0$, तो

(A) $x \in [2, \infty)$ (B) $x \in (2, \infty)$ (C) $x \in (-\infty, 2)$ (D) $x \in (-\infty, 2]$

हल सही विकल्प (B) है। क्योंकि $\frac{|x-2|}{x-2} \geq 0$ के लिए $|x-2| \geq 0$, और $x - 2 \neq 0$

उदाहरण 11 एक आयत की लंबाई उसकी चौड़ाई का तीन गुना है। यदि आयत का न्यूनतम परिमाप 160 सेमी है, तो

(A) चौड़ाई > 20 सेमी (B) लंबाई < 20 सेमी

(C) चौड़ाई $x \geq 20$ सेमी (D) लंबाई ≤ 20 सेमी

हल (C) सही विकल्प है। क्योंकि यदि चौड़ाई x सेमी है तो

$$2(3x + x) \geq 160 \Rightarrow x \geq 20$$

उदाहरण 12 x चर वाले असमिका निकाय के हल को नीचे प्रदर्शित संख्या रेखाओं पर निरूपित किया गया है, तो

आकृति 6.2

(A) $x \in (-\infty, -4) \cup (3, \infty)$ (B) $x \in [-3, 1]$

(C) $x \in (-\infty, -4) \cup [3, \infty)$ (D) $x \in [-4, 3]$

हल (A) सही विकल्प है।

असमिकाओं का उभयनिष्ठ हल ($-\infty$ से -4 तक) और 3 से ∞ तक है।

उदाहरण 13 यदि $|x+3| \geq 10$, तो

(A) $x \in (-13, 7]$ (B) $x \in (-13, 7)$

(C) $x \in (-\infty, -13] \cup [7, \infty)$ (D) $x \in [-\infty, -13] \cup [7, \infty)$

हल (C) सही विकल्प है क्योंकि $|x+3| \geq 10$,

$\Rightarrow$ $x + 3 \leq -10$ या $x + 3 \geq 10$

$\Rightarrow$ $x \leq -13$ या $x \geq 7$

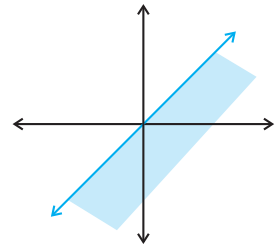
$\Rightarrow$ $x \in (-\infty, -13] \cup [7, \infty)$

उदाहरण 14 बताइए कि निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सत्य है और कौन-सा असत्य है?

(i) यदि $x > y$ और $b < 0$, तो $bx < by$

(ii) यदि $xy > 0$, तो $x > 0$, और $y < 0$

(iii) यदि $xy < 0$, तो $x > 0$, और $y > 0$

(iv) यदि $x > 5$ और $x > 2$, तो $x \in (5, \infty)$

आकृति 6.3

(v) यदि $|x| < 5$, तो $x \in (-5, 5)$

(vi) $x > -2$ का आलेख आकृति 6.4 है।

(vii) $x - y \leq 0$ का हल समुच्चय आकृति 6.3 है।

हल

(i) सत्य, क्योंकि किसी भी असमिका के दोनों पक्षों को ऋणात्मक संख्या से गुणा करने पर असमिका का चिह्न बदल जाता है।

(ii) असत्य, क्योंकि दो संख्याओं का गुणनफल धनात्मक होता है जब उन दोनों संख्याओं के चिह्न समान होते हैं।

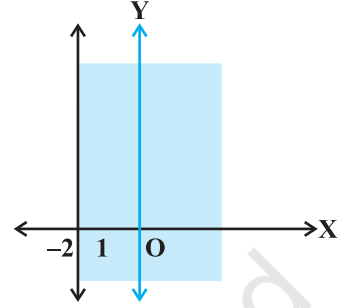
(iii) असत्य, क्योंकि दो संख्याओं का गुणनफल ऋणात्मक होता हैं जब उन दोनों संख्याओं के चिह्न विपरीत होते हैं।

आकृति 6.4

(iv) सत्य

(v) सत्य, क्योंकि $|x| < 5 \Rightarrow -5 < x < 5 \Rightarrow x \in (-5, 5)$

(vi) असत्य, क्योंकि $x > -2$ के लिए रेखा $x = -2$ को बिन्दुकित होना चाहिए अर्थात् अभीष्ट क्षेत्र में रेखा $x = -2$ के बिंदु सम्मिलित नहीं हैं।

(vii) असत्य, क्योंकि बिंदु $(1, 0)$ दी हुई असमिका को संतुष्ट नहीं करता है और यह छायांकित भाग का एक बिंदु है।

उदाहरण 15 निम्नलिखित में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

(i) यदि $x \geq -3$, तो $x + 5$ 2

(ii) यदि $-x \leq -4$, तो $2x$ 8

(iii) यदि $\dfrac{1}{x-2} < 0$, तो x 2

(iv) यदि $a < b$ और $c < 0$, तो $\dfrac{a}{c}$...........$\dfrac{b}{c}$

(v) यदि $|x-1| \leq 2$, तो -1..... x 3

(vi) यदि $|3x - 7| > 2$, तो x .... $\dfrac{5}{3}$ या x 3

(vii) यदि $p > 0$ एवं $q < 0$, तो $p + q$ ... p

हल

(i) ($\geq$), क्योंकि असमिका के चिह्न को परिवर्तित किये बिना उसके दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ी जा सकती है।

(ii) ($\geq$), क्योंकि दोनों पक्षों को -2 से गुणा करने के पश्चात् असमिका का चिह्न बदल जाता है।

(iii) (<), क्योंकि यदि $\frac{a}{b} < 0$ और $a > 0$, तो $b < 0$

(iv) (>), क्योंकि दोनों पक्षों को समान ऋणात्मक संख्या से गुणा करने पर असमिका का चिह्न बदल जाता है।

(v) (≤, ≤), $|x-1| \le 2 \Rightarrow -2 \le x-1 \le 2 \Rightarrow -1 \le x \le 3$

(vi) (<, >), $|3x-7| > 2 \Rightarrow 3x-7 < -2$ या $3x-7 > 2$

$\Rightarrow x < \frac{5}{3}$ या $x > 3$

(vii) (<), क्योंकि p धनात्मक है और q ऋणात्मक है, इसलिए $p + q$ हमेशा p से छोटा है।

6.3 प्रश्नावली

लघु उत्तरीय प्रश्न (S.A.)

प्रश्न संख्या 1 से 6 तक की असमिकाओं को x के लिए हल कीजिए:

1. $\frac{4}{x+1} \le 3 \le \frac{6}{x+1}, (x > 0)$

2. $\frac{|x-2|-1}{|x-2|-2} \le 0$

3. $\frac{1}{|x|-3} \le \frac{1}{2}$

4. $|x-1| \le 5,\ |x| \ge 2$

5. $-5 \le \frac{2-3x}{4} \le 9$

6. $4x + 3 \ge 2x + 17,\ 3x - 5 < -2$

7. कैसेट बनाने वाली किसी कंपनी के लागत एवं राजस्व फलन क्रमशः $C(x) = 26{,}000 + 30x$ एवं $R(x) = 43x$ है, जहाँ x एक सप्ताह में निर्मित किए गए एवं बेचे गए कैसेटों की संख्या है। कुछ लाभ अर्जित करने के लिए कंपनी द्वारा कितनी कैसेट अवश्य बेचे जाने चाहिए?

8. किसी तालाब के पानी की अम्लता सामान्य तब मानी जाती है जब प्रतिदिन के तीन मापों की औसत pH पाठ्यांक 8.2 एवं 8.5 के मध्य रहता है। यदि प्रथम दो pH पाठ्यांक 8.48 एवं 8.35 हैं तो तीसरी पाठ्यांक के pH मान का परिसर (रेंज) ज्ञात कीजिए ताकि तालाब के पानी की अम्लता सामान्य रहे।

9. 9% अम्ल वाले किसी विलयन को हल्का करने के लिए उसमें 3% अम्ल वाला विलयन मिलाया जाता है। इस प्रकार प्राप्त मिश्रण में 5% से अधिक एवं 7% से कम अम्ल होना चाहिए। 9% वाले विलयन की मात्रा यदि 460 लीटर है तो ज्ञात कीजिए कि 3% वाले विलयन की कितनी मात्रा मिलाने की आवश्यकता है?

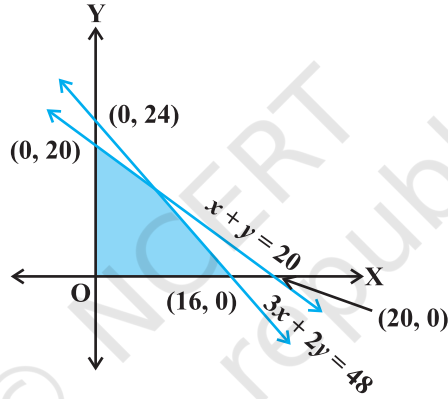
10. किसी विलयन को 40°C एवं 45°C तापमान के बीच ही रखना है। फॉरेनहाइट पैमाने पर तापमान का परिसर (रेंज) ज्ञात कीजिए यदि परिवर्तन सूत्र $F = \frac{9}{5}C + 32$ है।

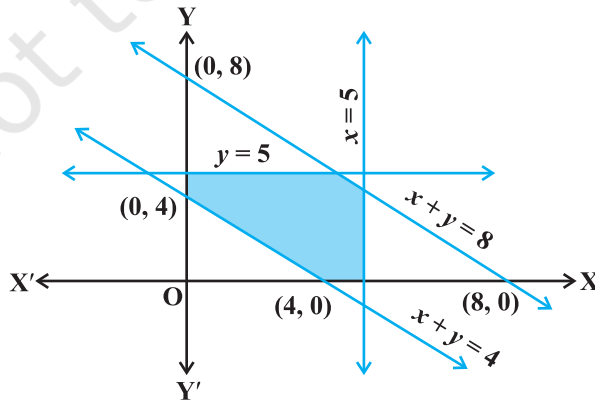
11. किसी त्रिभुज की सबसे बड़ी भुजा सबसे छोटी भुजा से दुगनी है एवं तीसरी भुजा सबसे छोटी भुजा से 2 सेमी अधिक है। यदि त्रिभुज का परिमाप 166 सेमी से अधिक है तो सबसे छोटी भुजा की न्यूनतम लंबाई ज्ञात कीजिए।

12. विश्व का सबसे गहरा छेद करते हुए ज्ञात हुआ कि पृथ्वी की सतह से x किमी नीचे का तापमान T डिग्री सेल्सियस में $T = 30 + 25\,(x - 3),\ 3 \le x \le 15$ होता है। ज्ञात कीजिए कि कितनी गहराई पर तापमान 155°C एवं 205°C के मध्य होगा?

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

13. निम्नलिखित असमिका निकाय को हल कीजिए: $\dfrac{2x+1}{7x-1} > 5,\ \dfrac{x+7}{x-8} > 2$

14. ऐसी रैखिक असमिकाएँ ज्ञात कीजिए जिनका हल समुच्चय नीचे प्रदर्शित आकृति का छायांकित भाग है।

आकृति 6.5

15. ऐसी रैखिक असमिकाएँ ज्ञात कीजिए जिनका हल समुच्चय नीचे दी हुई आकृति का छायांकित भाग है।

आकृति 6.6

16. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित रैखिक असमिका निकाय का कोई हल नहीं है।

$x + 2y \leq 3, 3x + 4y \geq 12, x \geq 0, y \geq 1$

17. निम्नलिखित रैखिक असमिका निकाय को हल कीजिए

$3x + 2y \geq 24, \quad 3x + y \leq 15, x \geq 4$

18. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित रैखिक असमिका निकाय का हल समुच्चय एक अपरिबद्ध क्षेत्र है।

$2x + y \geq 8, x + 2y \geq 10, x \geq 0, y \geq 0$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न (Objective type)

19 *से* 26 *तक के प्रश्नों में प्रत्येक के लिए दिये हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर का चयन कीजिए* (M.C.Q.)

19. यदि $x < 5$, तो

(A) $-x < -5$ (B) $-x \leq -5$

(C) $-x > -5$ (D) $-x \geq -5$

20. दिया हुआ है कि x, y, b वास्तविक संख्याएँ हैं और $x < y, b < 0$, तब

(A) $\frac{x}{b} < \frac{y}{b}$ (B) $\frac{x}{b} \leq \frac{y}{b}$

(C) $\frac{x}{b} > \frac{y}{b}$ (D) $\frac{x}{b} \geq \frac{y}{b}$

21. यदि $-3x + 17 < -13$, तो

(A) $x \in (10, \infty)$ (B) $x \in [10, \infty)$

(C) $x \in (-\infty, 10]$ (D) $x \in [-10, 10)$

22. यदि x वास्तविक संख्या है और $|x| < 3$, तो

(A) $x \geq 3$ (B) $-3 < x < 3$

(C) $x \leq -3$ (D) $-3 \leq x \leq 3$

23. x और b वास्तविक संख्याएँ हैं। यदि $b > 0$ और $|x| > b$, तो

(A) $x \in (-b, \infty)$ (B) $x \in [-\infty, b)$

(C) $x \in (-b, b)$ (D) $x \in (-\infty, -b) \cup (b, \infty)$

24. यदि $|x-1| > 5$, तो

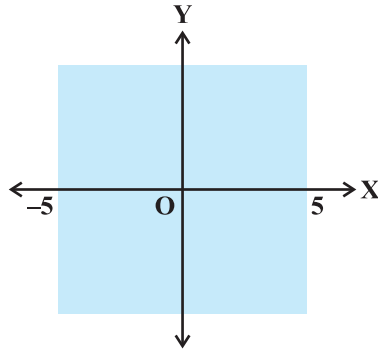
(A) $x \in (-4, 6)$ (B) $x \in [-4, 6]$

(C) $x \in [-\infty, -4) \cup (6, \infty)$ (D) $x \in [-\infty, -4) \cup [6, \infty)$

25. यदि $|x+2| \leq 9$, तो

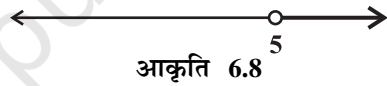
(A) $x \in (-7, 11)$ (B) $x \in [-11, 7]$

(C) $x \in (-\infty, -7) \cup (11, \infty)$ (D) $x \in (-\infty, -7) \cup [11, \infty)$

26. दिए हुए आलेख को प्रदर्शित करने वाली असमिका निम्नलिखित में से कौन-सी है।

आकृति 6.7

(A) $|x| < 5$ (B) $|x| \le 5$ (C) $|x| > 5$ (D) $|x| \ge 5$

प्रश्न संख्या 27 से 30 तक में x चर वाले किसी रैखिक असमिका के हल को संख्या रेखा पर निरूपित किया गया है। प्रत्येक प्रश्न में दिए हुये चार विकल्पों में से सही उत्तर का चयन कीजिए (M.C.Q.).

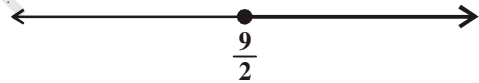
27. (A) $x \in (-\infty, 5)$ (B) $x \in (-\infty, 5]$
(C) $x \in [5, \infty,)$ (D) $x \in (5, \infty)$

आकृति 6.8

28. (A) $x \in (\frac{9}{2}, \infty)$

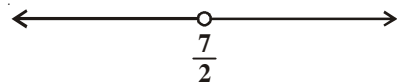
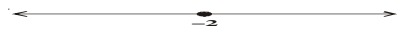
आकृति 6.9

(B) $x \in [\frac{9}{2}, \infty)$

(C) $x \in [-\infty, \frac{9}{2})$

(D) $x \in (-\infty, \frac{9}{2}]$

आकृति 6.10

29. (A) $x \in (-\infty, \frac{7}{2})$ (B) $x \in (-\infty, \frac{7}{2}]$

(C) $x \in [\frac{7}{2}, -\infty)$ (D) $x \in (\frac{7}{2}, \infty)$

30. (A) $x \in (-\infty, -2)$
(B) $x \in (-\infty, -2]$
(C) $x \in (-2, \infty]$
(D) $x \in [-2, \infty)$

आकृति 6.11

31. बताइए निम्नलिखित कथनों में से कौन-सा सत्य है एवं कौन-सा असत्य है?

(i) यदि $x < y$ और $b < 0$, तो $\frac{x}{b} < \frac{y}{b}$

(ii) यदि $xy > 0$, तो $x > 0$ और $y < 0$

(iii) यदि $xy > 0$, तो $x < 0$ और $y < 0$

(iv) यदि $xy < 0$, तो $x < 0$ और $y < 0$

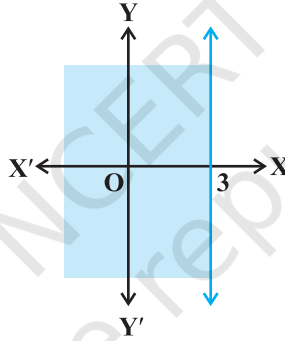
(v) यदि $x < -5$ और $x < -2$, तो $x \in (-\infty, -5)$

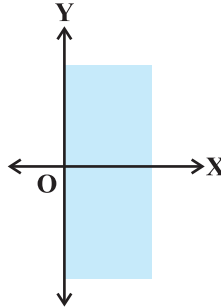
(vi) यदि $x < -5$ और $x > 2$, तो $x \in (-5, 2)$

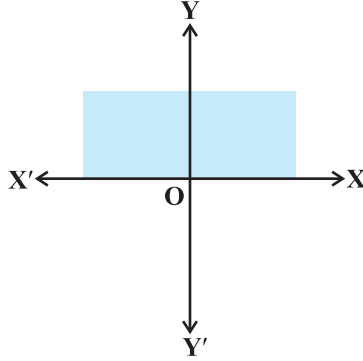
(vii) यदि $x > -2$ और $x < 9$, तो $x \in (-2, 9)$

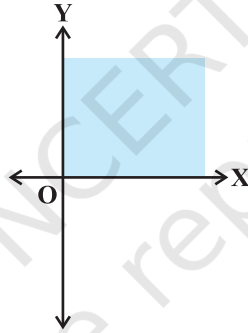
(viii) यदि $|x| > 5$, तो $x \in (-\infty, -5) \cup [5, \infty)$

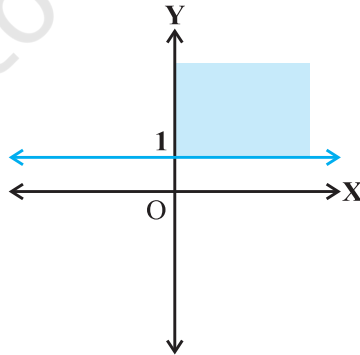
(ix) यदि $|x| \leq 4$, तो $x \in [-4, 4]$

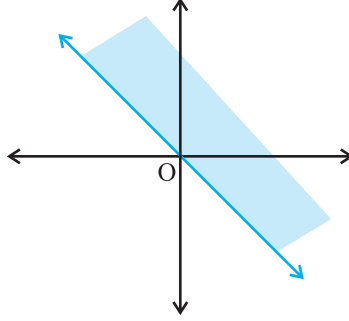
(x) नीचे दी गयी आकृति $x < 3$ के आलेख को निरूपित करता है।

आकृति 6.12

(xi) आकृति 6.13 $x \geq 0$ के आलेख को निरूपित करता है

आकृति 6.13

(xii) $y \leq 0$ का आलेख आकृति 6.14 में निरूपित है।

आकृति 6.14

(xiii) $x \geq 0$ और $y \leq 0$ का हल समुच्चय आकृति 6.15 में निरूपित है।

आकृति 6.15

(xiv) $x \geq 0$ और $y \leq 1$ का हल समुच्चय आकृति 6.16 में निरूपित है।

आकृति 6.16

(xv) $x + y \geq 0$ का हल समुच्चय नीचे दी हुई आकृति में है।

आकृति 6.17

32. निम्नलिखित में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

(i) यदि $-4x \geq 12$, तो x ... -3

(ii) यदि $\frac{-3}{4}x \leq -3$, तो x ... 4

(iii) यदि $\frac{2}{x+2} > 0$, तो x ... -2

(iv) यदि $x > -5$, तो $4x$ ... -20

(v) यदि $x > y$ और $z < 0$, तो $-xz$ ... $-yz$

(vi) यदि $p > 0$ और $q < 0$, तो $p - q$ ... p

(vii) यदि $|x+2| > 5$, तो x ... -7 या x ... 3

(viii) यदि $-2x + 1 \geq 9$, तो x ... -4